3
Análise Dimensional

3.1.
Introdução

Em um sistema coerente de unidades de medida as unidades de um pequeno número de grandezas são independentes e adotadas como unidades fundamentais ou de base. As unidades das demais grandezas, chamadas unidades derivadas, são dependentes dessas unidades fundamentais, de acordo com leis físicas ou fórmulas de definição.

O princípio da homogeneidade dimensional consiste em que toda equação que exprima uma lei física ou descreva um processo físico deve ser homogênea, relativamente a cada grandeza de base. Desse modo essa equação continuará válida, se forem mudadas as magnitudes das unidades fundamentais.

Portanto a relação funcional matemática que descreve um processo físico envolverá, no caso mais geral, produtos de potências designados como números Π; relações entre grandezas físicas de um mesmo tipo e uma delas escolhida como representativa, designadas como fatores de forma; e funções, expressas em forma adimensional, descrevendo a variação contínua de um mesmo tipo de grandeza física, designadas como funções de forma.

Na análise dimensional é sempre adotada a forma explícita em que uma das variáveis, a variável dependente, é a incógnita do problema. Todas as demais variáveis e constantes físicas universais ou específicas constituem os dados do problema e devem ser consideradas, em bloco, como variáveis independentes. A variável dependente deverá figurar em apenas um número Π, que é a incógnita do problema em forma adimensional.

3.2.
Semelhança Física e Modelos

Embora a análise dimensional seja incapaz, por si só, de descobrir a formulação completa de uma lei física, ela fornece indicações preciosas sobre combinações dos parâmetros envolvidos, de modo a reduzir o número total de variáveis a incluir nas equações. É assim um valioso guia para a elaboração de teorias que se proponham a interpretar resultados experimentais.

Além de incluir obrigatoriamente todos os parâmetros que possam ter influência no problema estudado, o que exige pelo menos uma cuidadosa análise qualitativa baseada em observações e pesquisas experimentais, a análise dimensional incorpora, de modo indireto, as leis físicas em que se baseiam as fórmulas dimensionais das constantes físicas universais ou específicas que figuram entre esses parâmetros.

Uma das principais aplicações da análise dimensional é o estabelecimento das condições de semelhança física, que devem relacionar os protótipos com os modelos utilizados nas experiências.

Para que um modelo possa representar o protótipo, isto é, para que os resultados obtidos nos ensaios com modelos possam ser estendidos aos protótipos, é preciso que haja semelhança, a começar pela semelhança geométrica. Em princípio todos os "números Π", fatores de forma e funções devem ter no modelo o mesmo valor que apresentam no protótipo. Em muitos casos introduzem-se distorções, isto é, adotam-se no modelo escalas diferentes para grandezas de um mesmo tipo: as conseqüências destas distorções devem ser cuidadosamente analisadas, para evitar erros de interpretação dos resultados.

3.3.
Condições de Semelhança Física

Se dois processos físicos são semelhantes, é possível prever o comportamento de um deles quando é conhecido o comportamento do outro. Na experimentação por meio de modelos, os dois processos físicos semelhantes são o protótipo e seu modelo; neste caso utiliza-se o modelo por ser mais fácil de ensaiá-lo em laboratório do que ensaiar diretamente o protótipo. Em geral os modelos são em escala geométrica reduzida, mas há casos em que se adotam modelos maiores do que os protótipos.

A primeira condição para a semelhança física é a semelhança geométrica, mas esta não é suficiente: um modelo não é simples maquete. As dimensões correspondentes relacionam-se pela escala geométrica.

É claro que em dois processos físicos semelhantes os parâmetros envolvidos são os mesmos. A relação entre as magnitudes de uma grandeza nos dois processos é também chamada, por analogia com a escala das dimensões geométricas e do tempo, de escala ou fator de escala. Na experimentação com modelos define-se como fator de escala a relação entre a magnitude da grandeza do modelo e no protótipo; se o modelo é reduzido, a escala geométrica é menor que a unidade. Em geral a escala é apresentada como fração tendo a unidade como numerador, e designada com o símbolo k ou λ .

$$k_i = \lambda_i = \frac{x_m}{x_p} = \frac{1}{x_p / x_m} = 1 : (x_p / x_m) \tag{3.1}$$

Para que haja semelhança física é condição necessária e suficiente que todos os números π e fatores de forma tenham os mesmos valores nos dois processos. As funções de forma, em apresentação adimensional, devem coincidir.

Designemos por $\pi_{i,m}$ os números π do modelo e $\pi_{i,p}$ os números correspondentes do protótipo. Para que haja semelhança física é necessário que

$$\pi_{i,m} = \pi_{i,p} \ , \qquad i = 1 \ .. \ (n\text{-}r) \tag{3.2}$$

$$(\text{fatores de forma})_m = (\text{fatores de forma})_p \tag{3.3}$$

$$(\text{funções de forma})_m = (\text{funções de forma})_p \tag{3.4}$$

Satisfeitas essas condições, as relações funcionais adimensionais do modelo e do protótipo coincidirão, e será possível prever a magnitude da variável dependente, ou incógnita do problema, no protótipo quando determinada experimentalmente sua magnitude no modelo. Fourier e Sedov chamam a atenção para o fato de que podemos passar do comportamento do protótipo para o do modelo se adotamos no modelo unidades de medida iguais às unidades de medida do protótipo multiplicadas pelos fatores de escala correspondentes, ou seja:

$$x_m = k_i \cdot x_p \tag{3.5}$$

Os fatores de escala para as variáveis dependentes, independentes e constantes físicas de modelos com efeito de temperatura são listados na Tabela 4.1. Deve-se frisar que, em problemas que envolvem temperatura, quatro grandezas fundamentais estão envolvidas: F (força), L (comprimento), T (tempo) e θ (temperatura). (*Zia et al., 1968 [6]*)

Em nosso estudo o fator de escala correspondente a dimensão linear é: $k_l = \frac{1}{6}$.

Tabela 3.1 – Fatores de escala

Grandeza	Dimensão	Fatores de escala, k_i
Ângulo, α	-	1
Coeficiente de expansão linear, α_T	θ^{-1}	1
Coeficiente de Poisson, ν	-	1
Deformação, ε	-	1
Deslocamento, δ	L	k_l
Diâmetro externo, D_e	L	k_l
Dimensão linear, l	L	k_l
Espessura, t	L	k_l
Força concentrada, F	F	k_l^2
Força por unidade de comprimento, F/l	FL^{-1}	k_l
Módulo de elasticidade, E	FL^{-2}	1
Pressão, p	FL^{-2}	1
Temperatura, θ	θ	1
Tempo, T	T	k_l^2
Tensão, σ	FL^{-2}	1